ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Αξίωμα 9 (Αξίωμα του Απείρου)

Υπάρχει ένα σύνολο Y έτσι $\emptyset \in Y$ και για κάθε $x \in Y \Rightarrow$
$\Rightarrow x^+ \in Y$ (δηλ. $\exists$ ένα απειροσύνολο)

Επομένως το $\emptyset$ είναι σύνολο.

Ορισμός

Ένα σύνολο n καλείται φυσικός αριθμός αν
είναι διατακτικός αριθμός και κάθε μη κενό υποσύνολο του έχει E-μέγιστο στοιχείο (δηλ. για $x, y \in E$
$x \subset y$ ή $y \subset x$ ή $y = x$)

Ορισμός

Ένα σύνολο X καλείται πεπερασμένο όταν αυτό είναι ισοδύναμο (ισοπληθικό) με έναν φυσικό αριθμό

Θυμίζουμε:

Τα a και b ισοδύναμα σύνολα αν $\exists \underset{1-1}{f}: A \xrightarrow{\varepsilon\pi\iota} B$

ΑΣΚΗΣΗ 101

Ν.δ.ο. κάθε στοιχείο ενός φυσικού αριθμού είναι φυσικός αριθμός

ΛΥΣΗ

$x \in n \xrightarrow{n \text{ διάταξη}} x$ διατακτικός αριθμός (από Ασκ. 89)
$u \subseteq x \subseteq n \Rightarrow u \subseteq n \xrightarrow{n \text{ φυσικός}} u$ έχει E-μέγιστο στοιχείο   και έστω $u \in n$
Τελικά x φυσικός αριθμός.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : (Ασκ. 102) → πχ $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = 3 = 2^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}^+$

Αν α ordinal και β E-μέγιστο στοιχείο του α τότε $\alpha = \beta^+$

Απόδειξη

$\beta \in a \Longrightarrow \{\beta\} \subseteq a \xRightarrow{a\ \text{διατακτ.}} \beta \subseteq a$

άρα $\{\beta\} \cup \beta = \beta^+ \subseteq a$

Αντίστροφα, έστω $x \in a \Rightarrow x \in \beta$ ή $x = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \beta \cup \{\beta\} \Rightarrow a \subseteq \beta^+ = \beta \cup \{\beta\}$

Άρα, $a = \beta^+$

Θεώρημα 2 (Άσκ 103)

Αν n φυσικός αριθμός τότε και n^+ φυσικός αριθμός

Λύση

n διατακτικός $\Rightarrow n^+$ διατακτικός

το n είναι Ε-μέγιστο στοιχείο του n^+

Άρα, n^+ φυσικός αριθμός.

Θεώρημα 3 (Άσκ 104)

Το $\emptyset$ είναι φυσικός αριθμός και $\nexists \beta \in \mathbb{N}$: ώστε $\emptyset = \beta^+$

Απόδ

$\emptyset$ σύνολο

Πρέπει το $E/\emptyset$ είναι κ.δ. (κενή αλήθεια)

$\forall x \in \emptyset \Rightarrow x \subseteq \emptyset$ (κενή αλήθεια) $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \emptyset$ είναι διατακτικός αριθμός

Έστω ότι $\exists \beta \in \mathbb{N}: \emptyset = \beta^+ = \underbrace{\beta \cup \{\beta\}}_{\neq \emptyset} \neq \emptyset$ άτοπο

Θεώρημα 4 (Άσκ. 105)

Αν m & n φυσικοί και $m^+ = n^+ \Rightarrow m = n$

(Μονοσήμαντο του διαδόχου)

Απόδ:

Γενικά αν a διατακτικός $\Rightarrow \bigcup a^+ = a$ και

αν a φυσικός $\Rightarrow a$ ordinal $\Rightarrow a^+$ ordinal

οπότε m^+, n^+ ordinals
αφού $m^+ = n^+ \Rightarrow \cup m^+ = \cup n^+ \Rightarrow m = n$

Θεώρημα 5 (Ασκ. 106)
Αν X υποκλάση του ω όπου — κλάση όλων των φυσικών αριθμών
1) $\emptyset \in X$
2) $\forall u \in X \Rightarrow u^+ \in X$
Τότε ισχύει $\omega = X$
(Δηλ. το $\mathbb{N}$ είναι το ελάχιστο επαγωγικό σύνολο)
Απόδ.
Έστω ότι $X \neq \omega \Rightarrow \omega - X \neq \emptyset \Rightarrow \omega - X$ έχει E-ελάχιστο στοιχείο. Έστω a αυτό.
Αφού, $\emptyset \notin \omega - X \Rightarrow a \neq \emptyset$
Τότε a φυσικός αριθμός $\Rightarrow a$ έχει E-μέγιστο στοιχείο. Έστω β αυτό
Όμως από το Θεώρημα 1 το $a = \beta^+ = \beta \cup \{\beta\}$
Άρα $\beta \in a \to (\beta, a) \in E$
Όμως, a E ελάχιστο του $\omega - X$
Τότε το $\beta \notin \omega - X \Rightarrow \beta \in X \overset{\text{υπόθ}}{\Rightarrow} \beta^+ = a \Rightarrow a \in X$ (Ἀ)

Θεώρημα 6 (Ασκ. 107)
Το ω είναι διατακτικός αριθμός
Απόδειξη
Καταρχάς ΝΔΟ ω σύνολο
Παίρνοντας το $Y \cap \omega$ (με Y του αξ 9)
i) $\emptyset \in Y \cap \omega$: $\emptyset \in Y \wedge \emptyset \in \omega$
Έστω $x \in Y \cap \omega \Rightarrow x \in Y \wedge x \in \omega \underset{Aξ 9}{\overset{Θ.2}{\Longrightarrow}} x^+ \in Y \wedge x^+ \in \omega$
$\Rightarrow x^+ \in Y \cap \omega \overset{Θ.5}{\Longrightarrow} Y \cap \omega = \omega$
Άρα, εφόσον $Y \cap \omega \subseteq Y \Rightarrow \omega \subseteq Y \Rightarrow \omega$ σύνολο
Μένει ΝΔΟ ω ordinal
$E/\omega \Rightarrow$ καλά διατεταγμένο. Έστω $n \in \omega$.

Αν $m \subseteq n \Rightarrow m \in \omega \rightarrow n \subseteq m \Rightarrow \omega$ ordinal

Άρα, ω σύνολο και ordinal $\Rightarrow$ ω διατακτικός

Θεώρημα 7 (Ασκ. 108) Αρχή Μαθημ. επαγωγής

Έστω $P(n)$ ανοιχτή πρόταση

i) $P(\emptyset)$ και

ii) $(\forall k)(k \in \omega) \Rightarrow (P(k) \Rightarrow P(k^+))$

Νδο $(\forall n)(n \in \omega) \Rightarrow P(n)$.

Απόδειξη

Θεωρούμε το σύνολο

$X = \{ n : n \in \omega \land P(n) \}$

$\emptyset \in X$ διότι $\emptyset \in \omega$ και $P(\emptyset)$ (αληθής)

Έστω $n \in \omega \land P(n) \Rightarrow P(n^+) \Rightarrow n^+ \in X$

Άρα οι δύο προϋποθέσεις του Θ.5 πληρούνται

τότε $X = \omega$.

Θεώρημα 8

Ας είναι E σύνολο και $a \in E$, $\varphi : E \rightarrow E$

τότε $\exists!\, g : \omega \rightarrow E$ τ/ω $g(0) = a$ και

$g(n^+) = \varphi(g(n))$ $\forall n \in \omega$ (Αριθμοί φυσικών)

ΑΠΕΙΡΑ ΣΥΝΟΛΑ

Ορισμός: Ένα σύνολο είναι άπειρο αν δεν είναι πεπερασμένο, δηλαδή δεν είναι ισοδύναμο με κάποιον φυσικό αριθμό

Θεώρημα 1

Κάθε υποσύνολο πεπερασμένου συνόλου είναι πεπερασμένο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί λοιπον νδο για τυχαίο φυσικό αριθμό n καθε $n' \subseteq n$ να είναι πεπερασμένο

$X := \{n : n \in \omega$ και καθε $n' \subseteq n$ πεπερασμένο$\}$

Αρκεί νδο $\forall k \in X \Rightarrow k^+ \in X$ και $\emptyset \in X$

Το μοναδικό υποσύνολο του $\emptyset$ είναι το $\emptyset$ και εχουμε δείξει οτι $\emptyset$ πεπερασμένο $\Rightarrow \boxed{\emptyset \in X}$

Θεωρούμε τυχαίο $k \in X$

$k^+ := k \cup \{k\}$

Εστω $Y \subseteq k^+$

i) Αν $Y \subseteq k \xRightarrow{k \in X} Y$ πεπερασμένο ισχυει

ii) Αν $Y \not\subseteq k$. Θελω $Y \not\subseteq k$ και $Y \subseteq k^+$

α. Αν $Y = k^+$ τοτε Y φυσικός $\Rightarrow Y$ πεπερασμένο

β. Αν $Y \subset k^+$ (ή $Y \neq k^+$) τοτε $Y \not\subseteq k$ & $Y \subsetneq k^+ \Rightarrow$

$\Rightarrow k \in Y \Rightarrow (\exists a \in k)\ a \notin Y$ $k \notin k$

Θεωρούμε το συνολο

$Z = (Y \setminus \{k\}) \cup \{a\}$ οπου $Z \cong Y$ (ως ισοπληθικά)

Εστω $b \in Z \Rightarrow \begin{cases} b \in Y \setminus \{k\} \xRightarrow{(*)} b \in k \\ \text{ή} \\ b \in \{a\} \Rightarrow b = a \in k \end{cases} \Rightarrow Z \subseteq k$

$(*)$ $Y \subseteq k \cup \{k\} \Rightarrow Y \setminus \{k\} \subseteq k$

Αρα, Z πεπερασμένο $\Rightarrow Y$ πεπερασμένο (ισοπληθικά)

Αρα, $k^+ \in X$ οταν $k \in X$

Συνεπώς, $X = \omega$

Θεώρημα 2

Αν το A πεπερασμένο συνολο τοτε το A δεν είναι ισοδύναμο με κανένα γνήσιο υποσύνολό του.

Υποδειξη

$X = \{n \in \omega : n \not\cong n'$ οπου $n' \subset n\}$

Άσκηση 123

Ν.δ.ο. το ω είναι άπειρο

Απόδειξη

Θεωρούμε την $f(k) = k^+$, $k \in \omega$

Έστω $f(k_1) = f(k_2) \Rightarrow k_1^+ = k_2^+ \overset{\Theta.4}{\Rightarrow} k_1 = k_2 \Rightarrow$ 1-1

Το $\emptyset$ δεν είναι διάδοχος κανενός φυσικού αριθμού $\Rightarrow \nexists k \in \omega : f(k) = \emptyset$

$\left.\begin{array}{l} \text{αλλά } f(k) = k^+ \quad \forall k \in \omega \\ \text{άρα } f(k) \in \omega \setminus \{\emptyset\} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ επί

Άρα το ω είναι άπειρο αφού $f: \omega \to \omega'$ με $\omega' = \omega \setminus \{\emptyset\} \subset \omega$

Ορισμός

Ένα σύνολο θα λέγεται άπειρο κατά Dedekind εάν είναι ισοδύναμο με κάποιο γνήσιο υποσύνολο του.

Παρατήρηση

A άπειρο κατά Dedekind $\Leftarrow$ A άπειρο

Θεώρημα

A άπειρο κατά Dedekind $\Leftrightarrow$ A άπειρο

Άσκηση 124

Ένα πεπερασμένο σύνολο είναι ισοδύναμο με μοναδικό φυσικό αριθμό

ΛΥΣΗ

Έστω X πεπερ. σύνολο τ.ω. $X \cong n$ και $X \cong n'$ με $n \neq n'$. Η E/On είναι σχέση κ.δ. στην On και άρα $n \in n'$ ή $n' \in n$

κλάση διατακτικών

Έστω $n' \in n \xrightarrow{n,n' \text{ φυσ.} \Rightarrow \text{διατακτ.}} n' \subseteq n \Rightarrow n' \subset n$

$\left.\begin{array}{l} n \simeq x \\ x \simeq n' \end{array}\right\} \Rightarrow n \simeq n'$

Άρα, n απέραντο (Σ) αφού n φυσικός

Ορισμός:

Αριθμήσιμο λέγεται εκείνο το σύνολο το οποίο είναι ισοδύναμο των φυσικών αριθμών
Το πολύ αριθμήσιμο λέγεται εκείνο το σύνολο το οποίο είναι είτε αριθμήσιμο είτε πεπερασμένο.

Θεώρημα Zermelo

Αν ισχύει το αξίωμα της επιλογής, τότε για κάθε σύνολο A υπάρχει μία καλή διάταξη στο A

Θεώρημα

Κάθε απέραντο σύνολο έχει τουλάχιστον ένα αριθμήσιμο υποσύνολο.

Απόδειξη

Από το Θεώρημα του Zermelo έχουμε μια σχέση καλής διάταξης R στο A
Βάσει της άσκησης 86
i) $\exists!$ ισομορφισμός $f: \omega \to A$
ii) $\exists!$ ισομορφισμός $f: \omega \to$ αρχ. τμήμα του A
iii) $\exists!$ ισομορφισμός $f: A \to$ αρχ. τμήμα του ω. → και το αρχ. τμήμα του ω είναι φυσικός άρα
Το (iii) δεν ισχύει διότι το A απέραντο
Το (i) δηλώνει ότι A αριθμήσιμο
Το (ii) —//— το Αρχ. τμήμα του A είναι αριθμήσιμο
Έτσι, για τις περιπτώσεις (i) και (ii) η εικόνα του ω κάτω από τον ισομορφισμό είναι το ζητούμενο υποσύνολο της εκφώνησης